



高中数学易错点梳理

必考知识点：

- 第一章、集合与函数概念（常用逻辑用语）
- 第二章、基本初等函数
- 第三章、函数的应用
- 第四章、三角函数
- 第五章、平面向量
- 第六章、三角恒等变换
- 第七章、解三角形
- 第八章、数列
- 第九章、不等式
- 第十章、空间几何体
- 第十一章、点、直线、平面之间的位置关系
- 第十二章、直线与方程
- 第十三章、圆与方程
- 第十四章、圆锥曲线与方程
- 第十五章、算法初步与框图
- 第十六章、概率、统计与统计案例
- 第十七章、推理与证明
- 第十八章、数系的扩充与复数的引入
- 第十九章、选修系列（坐标系与参数方程、不等式选讲）
- 第二十章、导数及其应用
- 第二十一章、计数原理与二项式

数学中的隐含条件往往最容易被忽视，这些隐含条件通常被称为题中的“陷阱”，解题过程中一不小心就会掉进去。本文列举出了高中课本中一些常见的易错点，希望同学们在今后的学习中引以为戒。

一、集合与简易逻辑

易错点 1 对集合表示方法理解存在偏差

【问题】1： 已知 $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{y | y > 1\}$ ，求 $A \cap B$ 。

错解： $A \cap B = \Phi$

剖析：概念模糊，未能真正理解集合的本质。

正确结果： $A \cap B = B$

【问题】2： 已知 $A = \{y | y = x + 2\}$, $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ ，求 $A \cap B$ 。

错解： $A \cap B = \{(0, 2), (-2, 0)\}$

正确答案： $A \cap B = \Phi$

剖析：审题不慎，忽视代表元素，误认为 A 为点集。

反思：对集合表示法部分学生只从形式上“掌握”，对其本质的理解存在误区，常见的错误是不理解集合的表示法，忽视集合的代表元素。



易错点 2 在解含参数集合问题时忽视空集

【问题】：已知 $A = \{x | 2a < x < a^2\}$, $B = \{x | -2 < x < 1\}$ ，且 $A \subseteq B$ ，求 a 的取值范围。

错解： $[-1, 0)$

剖析：忽视 $A = \emptyset$ 的情况。

正确答案： $[-1, 2]$

反思：由于空集是一个特殊的集合，它是任何集合的子集，因此对于集合 $A \subseteq B$ 就有可能忽视了 $A = \emptyset$ ，导致解题结果错误。尤其是在解含参数的集合问题时，更应注意到当参数在某个范围内取值时，所给的集合可能是空集的情况。考生由于思维定式的原因，往往会在解题中遗忘了这个集合，导致答案错误或答案不全面。

易错点 3 在解含参数问题时忽视元素的互异性

【问题】：已知 $1 \in \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$ ，求实数 a 的值。

错解： $a = -2, -1, 0$

剖析：忽视元素的互异性，其实当 $a = -2$ 时， $(a+1)^2 = a^2 + 3a + 3 = 1$ ；当 $a = -1$ 时，

$a+2 = a^2 + 3a + 3 = 1$ ；均不符合题意。

正确答案： $a = 0$

反思：集合中的元素具有确定性、互异性、无序性，集合元素的三性中的互异性对解题的影响最大，特别是含参数的集合，实际上就隐含着对字母参数的一些要求。解题时可先求出字母参数的值，再代入验证。

易错点 4 充分必要条件颠倒出错

【问题】：已知 a, b 是实数，则“ $a > 0$ 且 $b > 0$ ”是“ $a + b > 0$ 且 $ab > 0$ ”的

A 充分而不必要条件 B 必要而不充分条件 C 充分必要条件 D 既不充分也不必要条件

错解：选 B

剖析：识记不好，不能真正理解充要条件概念，未能掌握判断充要条件的方法。

正确答案：C

反思：对于两个条件 A, B ，如果 $A \Rightarrow B$ ，则 A 是 B 的充分条件， B 是 A 的必要条件，如果 $A \Leftrightarrow B$ ，则 A 是 B 的充要条件。判断充要条件常用的方法有①定义法；②集合法；③等价法。解题时最容易出错的就是颠倒了充分性与必要性，所以在解决这类问题时，一定要分清条件和结论，根据充要条件的定义，选择恰当的方法作出准确的判断，不充分不必要常借助反例说明。

二、函数与导数

易错点 5 判断函数奇偶性时忽视定义域

【问题】 1：判断函数 $y = \frac{(x-1)(x^2+1)}{x(x-1)}$ 的奇偶性。

错解：原函数即 $y = \frac{x^2+1}{x}$ ， \therefore 为奇函数



剖析：只关注解析式化简，忽略定义域。

正确答案：非奇非偶函数。

【问题】2：判断函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$ 的奇偶性。

错解： $\because f(-x) = f(x)$ ， \therefore 为偶函数

剖析：不求函数定义域只看表面解析式，只能得到偶函数这一结论，导致错误。

正确答案：既奇且偶函数。

反思：函数具有奇偶性的必要条件是其定义域关于原点对称。如果不具备这个条件，一定是非奇非偶函数。在定义域关于原点对称的前提下，如果对定义域内任意 x 都有 $f(-x) = -f(x)$ ，则

$f(x)$ 为奇函数；如果对定义域内任意 x 都有 $f(-x) = f(x)$ ，则 $f(x)$ 为偶函数，如果对定义域

内存在 x_0 使 $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ ，则 $f(x)$ 不是奇函数；如果对定义域内存在 x_0 使

$f(-x_0) \neq f(x_0)$ ，则 $f(x)$ 不是偶函数。

易错点 6 解“二次型函数”问题时忽视对二次项系数的讨论

【问题】：函数 $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m+1)x - 1$ 的图象与 x 轴只有一个交点，求实数 m 的取值范围。

错解：由 $\Delta = 0$ 解得 $m = 0$ 或 $m = -3$

剖析：知识残缺，分类讨论意识没有，未考虑 $m-1=0$ 的情况。

正确答案： $\{-3, 0, 1\}$

反思：在二次型函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，当 $a \neq 0$ 时为二次函数，其图象为抛物线；当 $a = 0, b \neq 0$

时为一次函数，其图象为直线。在处理此类问题时，应密切注意 x^2 项的系数是否为 0，若不能确定，应分类讨论，另外有关三个“二次”之间的关系的结论也是我们应关注的对象。例如：

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ 解集为 } R \Leftrightarrow a > 0, \Delta < 0 \text{ 或 } a=b=0, c > 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ 解集为 } \emptyset \Leftrightarrow a < 0, \Delta \leq 0 \text{ 或 } a=b=0, c \leq 0$$

易错点 7 用函数图象解题时作图不准

【问题】：求函数 $f(x) = x^2$ 的图象与直线 $f(x) = 2^x$ 的交点个数。

错解：两个

剖析：忽视指数函数与幂函数增减速度快慢对作图的影响。

正确答案：三个

反思：“数形结合”是重要思想方法之一，以其准确、快速、灵活及操作性强等诸多优点颇受数学学习者的青睐。但我们在解题时应充分利用函数性质，画准图形，不能主观臆造，导致图形“失真”，从而得出错误的答案。



易错点 8 忽视转化的等价性

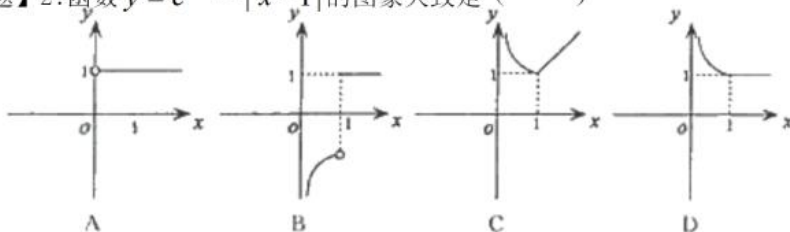
【问题】1: 已知方程 $mx^2 - 3x + 1 = 0$ 有且只有一个根在区间 $(0, 1)$ 内, 求实数 m 的取值范围。

错解: \because 方程 $mx^2 - 3x + 1 = 0$ 有且只有一个根在区间 $(0, 1)$ 内, \therefore 函数 $y = mx^2 - 3x + 1$ 的图象与 x 轴在 $(0, 1)$ 内有且只有一个交点, $\therefore f(0)f(1) < 0$, 解得 $m < 2$

剖析: 知识残缺, 在将方程转化为函数时, 应考虑到 $f(1) = 0$ 的情况。

正确答案: $m \in (-\infty, 2]$

【问题】2: 函数 $y = e^{|\ln x|} - |x - 1|$ 的图象大致是 ()



剖析: ①在转化过程中, 去绝对值时出错, 从而得到错误的图象。

②在图象变换过程中出错, 搞错平移方向。

正确答案: D

反思: 等价转化是数学的重要思想方法之一, 处理得当会起到意想不到的效果, 但等价转化的前提是转化的等价性, 反之会出现各种离奇的错误。

易错点 9 分段函数问题

【问题】1: 已知 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x+1 & x < 1 \\ a^x & x \geq 1 \end{cases}$ 是 R 上的增函数, 求 a 的取值范围。

错解: $(1, 2)$

剖析: 知识残缺, 只考虑到各段函数在相应定义域内为增函数, 忽视 $f(x)$ 在分界点附近函数值大小关系。

正确答案: $[\frac{3}{2}, 2)$

【问题】2: 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x \leq 0, x \leq 0 \\ 2, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(-4) = f(0), f(-2) = -2$, 求关于 x 的方程

$f(x) = x$ 解的个数。

错解: 两个

剖析: 基础不实, 分类讨论意识没有, 未能将方程 $f(x) = x$ 分两种情况来解。



正确答案：三个

反思：与分段函数相关的问题有作图、求值、求值域、解方程、解不等式、研究单调性及讨论奇偶性等等。在解决此类问题时，要注意分段函数是一个函数而不是几个函数，如果自变量取值不能确定，要对自变量取值进行分类讨论，同时还要关注分界点附近函数值变化情况。

易错点 10 误解“导数为 0”与“有极值”的逻辑关系

【问题】：函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，求 a, b 的值。

错解：由 $f(1) = 10, f'(1) = 0$ 解得 $a = 4, b = -11$ 或 $a = -3, b = 3$

剖析：对“导数为 0”与“有极值”逻辑关系分辨不清，错把 $f'(x_0)$ 为极值的必要条件当作充要条件。

正确答案： $a=4, b=-11$

反思：在使用导数求函数极值时，很容易出现的错误是求出使导函数等于 0 的点，而没有对这些点左右两侧导函数的符号进行判断，误以为使导函数等于 0 的点就是函数的极值点。出现这种错误的原因就是对导数与极值关系不清。可导函数在一点处的导函数值为 0 只是这个函数在此点取到极值的必要条件，充要条件是 $f'(x_0) = 0$ 且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧异号。

易错点 11 对“导数值符号”与“函数单调性”关系理解不透彻

【问题】：若函数 $f(x) = ax^3 - x$ 在 R 上为减函数，求实数 a 的取值范围。

错解：由 $f'(x) = 3ax^2 - 1 < 0$ 在 R 上恒成立， $\therefore \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 12a < 0 \end{cases}$ ，解得 $a < 0$

剖析：概念模糊，错把 $f(x)$ 在某个区间上是单调增（减）函数的充分条件当成充要条件。事实上 $a = 0$ 时满足题意。

正确答案： $a \leq 0$

反思：一个函数在某个区间上单调增（减）的充要条件是这个函数的导函数在此区间上恒大（小）于等于 0，且导函数在此区间的任意子区间上都不恒为 0。切记导函数在某区间上恒大（小）于 0 仅为该函数在此区间上单调增（减）的充分条件。

易错点 12 对“导函数值正负”与“原函数图象升降”关系不清楚

【问题】：已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则 $y = f(x)$ 的图象最有可能的是



错解：选 A, B, D



剖析：概念不清，凭空乱猜，正确解法是由于 $f'(0) = f'(2) = 0$ ，且两边值符号相反，故 0 和 2 为极值点；又因为当 $x < 0$ 和 $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $0 < x < 2$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上为增函数，在 $(0, 2)$ 上为减函数。

正确答案：C

反思：解答此类题的关键是抓住①导函数的零点与原函数的极值点关系——极值点的导数值为 0；②导函数值的符号与原函数单调性的关系——原函数看增减，导函数看正负。

三、数列

易错点 13 由 S_n 求 a_n 时忽略对 “ $n=1$ ” 检验

【问题】：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - n + 1$ ，求 a_n 。

错解：由 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 解得 $a_n = 2n - 2$

剖析：考虑不全面，错误原因是忽略了 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 成立的条件 $n \geq 2$ ，实际上当 $n=1$ 时就出现了 S_0 ，而 S_0 是无意义的，所以使用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求 a_n ，只能表示第二项以后的各项，而第一项能否用这个 a_n 表示，尚需检验。

正确答案：
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2n-2 & (n \geq 2, n \in N^*) \end{cases}$$

反思：在数列问题中，数列的通项 a_n 与其前 n 项和 S_n 之间关系如下

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2, n \in N^*) \end{cases}$$
，在使用这个关系式时，要牢牢记住其分段的特点。当题中给出数列 $\{a_n\}$ 的 a_n 与 S_n 关系时，先令 $n=1$ 求出首项 a_1 ，然后令 $n \geq 2$ 求出通项 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，最后代入验证。解答此类题常见错误为直接令 $n \geq 2$ 求出通项 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ，也不对 $n=1$ 进行检验。

易错点 14 忽视两个“中项”的区别

【问题】： $b^2 = ac$ 是 a, b, c 成等比数列的 ()

A 充分不必要条件 B 必要不充分条件 C 充要条件 D 既不充分有不必要条件

错解：C

剖析：思维不缜密，没有注意到当 $b^2 = ac$ 时， a, b, c 可能为 0。



正确答案: B

反思: 若 a, b, c 成等比数列, 则 b 为 a 和 c 的等比中项。由定义可知只有同号的两数才有等比中项, “ $b^2 = ac$ ” 仅是 “ b 为 a 和 c 的等比中项” 的必要不充分条件, 在解题时务必要注意此点。

易错点 15 等比数列求和时忽视对 q 讨论

【问题】: 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 且 $S_3 = 3a_3$, 求它的公比 q 。

错解: $\because S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 3a_3$, 解得 $q = -\frac{1}{2}$

剖析: 知识残缺, 直接用等比数列的求和公式, 没有对公比 q 是否等于 1 进行讨论, 导致失误。

正确答案: $q = -\frac{1}{2}$ 或 $q = 1$

反思: 与等差数列相比, 等比数列有一些特殊性质, 如等比数列的每一项包括公比均不为 0, 等比数列的其前 n 项和 S_n 为分段函数, 其中当 $q=1$ 时, $S_n = na_1$ 。而这一点正是我们解题中被忽略的。

易错点 15 用错了等差、等比数列的相关公式与性质

【问题】: 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30, 前 $2m$ 项和为 100, 求它的前 $3m$ 项和 S_{3m} 。

错解一: 170

剖析: 基础不实, 记错性质, 误以为 S_m, S_{2m}, S_{3m} 成等差数列。

错解二: 130

剖析: 基础不实, 误以为 S_m, S_{2m}, S_{3m} 满足 $S_{3m} = S_m + S_{2m}$ 。

正确答案: 210

反思: 等差、等比数列各自有一些重要公式和性质 (略), 这些公式和性质是解题的根本, 用错了公式和性质, 自然就失去了方向。解决这类问题的一个基本出发点就是考虑问题要全面, 把各种可能性都考虑进去, 认为正确的命题给予证明, 认为不正确的命题举出反例予以说明。

易错点 16 用错位相减法求和时项数处理不当

【问题】: 求和 $S_n = 1 + 3a + 5a^2 + \dots + (2n-1)a^{n-1}$ 。

剖析: ①考虑不全面, 未对 a 进行讨论, 丢掉 $a=1$ 时的情形。

②将两个和式错位相减后, 成等比数列的项数弄错。

③将两个和式错位相减后, 丢掉最后一项。

正确答案:
$$s_n = \begin{cases} n^2 & (a=1) \\ \frac{1}{1-a} + \frac{2a(1-a^{n-1})}{(1-a)^2} + \frac{2n-1}{1-a} a^n & (a \neq 1) \end{cases}$$

反思: 如果一个数列为一个等差数列和一个等比数列对应项积所得到的, 那么该数列可用错位相减法求和。基本方法是设这个和式为 S_n , 在这个和式的两端同时乘以等比数列的公比得到另一



个和式，将这两个和式错位相减，得到一个新的和式，该式分三部分①原来数列的第一项；②一个等比数列的前 $n-1$ 项和；③原来数列的第 n 项乘以公比的相反数。在用错位相减法求和时务必要处理好这三个部分，特别是等比数列的项数，有时含原来数列的第一项共 n 项，有时只有 $n-1$ 项。另外，如果公比为字母需分类讨论。

易错点 17 数列中的最值错误

【问题】：在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 25$ ， $S_9 = S_{16}$ ，求此数列的前几项和最大。

剖析：①解题不细心，在用等差数列前 n 项和求解时，解得 $n=12.5$ ，误认为 $n=12.5$ 。

②考虑不全面，在用等差数列性质求解得出 $a_{13}=0$ 时，误认为只有 S_{13} 最大。

正确答案： a_{12} 或 a_{13}

反思：数列的通项公式与前 n 项和公式都是关于正整数 n 的函数，要善于用函数的观点认识和理解数列问题。但是考生很容易忽视 n 为正整数的特点，有时即使考虑了 n 为正整数，但对于 n 为何值时，能够取到最值求解出错。在关于正整数 n 的二次函数中其取最值的点要根据正整数距离二次函数的对称轴远近而定。

四、三角函数

易错点 18 求解时忽略角的范围

【问题】1：在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{3}{5}$ ， $\cos B = \frac{5}{13}$ ，求 $\cos A$ ， $\sin B$ 的值。

错解： $\cos A = \pm \frac{4}{5}$ ， $\sin B = \pm \frac{12}{13}$

剖析：基础不实，忽视开方时符号的选取。

正确答案： $\cos A = \frac{4}{5}$ ， $\sin B = \frac{12}{13}$

【问题】2：在 $\triangle ABC$ 中， A 、 B 为锐角，且 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，求 $A+B$ 的值。

错解：先求出 $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\because A+B \in (0, \pi)$ ， $\therefore A+B = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

剖析：知识残缺，由于 A 、 B 为锐角，所以 $A+B \in (0, \pi)$ 。又由于正弦函数在 $(0, \pi)$ 上不是单调函数，所以本题不宜求 $\sin(A+B)$ ，宜改求 $\cos(A+B)$ 或 $\tan(A+B)$ 。

正确答案： $A+B = \frac{\pi}{4}$

【问题】1：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{3}$ ， $B = \frac{\pi}{3}$ ，求角 A

错解：用正弦定理求得 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore A = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

剖析：基础不牢，忽视隐含条件 $b \geq a$ 出错。

正确答案： $A = \frac{\pi}{4}$

反思：三角函数中的平方关系是三角变换的核心，也是易错点之一。解题时，务必重视“根据已



知角的范围和三角函数的取值，精确确定未知角的范围，并进行定号”。

易错点 19 求关于 $\sin x, \cos x$ 最值时忽视正、余弦函数值域

【问题】：已知 $\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$ ，求 $\sin y - \cos^2 x$ 的最大值。

错解：令 $t = \sin x$ ，得 $\sin y - \cos^2 x = t^2 - t - \frac{2}{3} (-1 \leq t \leq 1)$ ，通过配方、作图解得 $\sin y - \cos^2 x$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$

剖析：本题虽注意到 $\sin x$ 的值域，但未考虑到 $\sin x$ 与 $\sin y$ 相互制约，即由于 $-1 \leq \sin y \leq 1$ ，

$$\therefore \sin x \text{ 必须同时满足 } \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{3} - \sin x \leq 1 \end{cases}.$$

正确答案： $\frac{4}{9}$

反思：求关于 $\sin x, \cos x$ 最值的常规方法是通过令 $t = \sin x$ （或 $\cos x$ ）将三角函数的最值问题转化为关于 t 的二次函数问题求解。但由于正、余弦函数值域限制， t 只能在某一特定范围内取值，解题时务必要注意此点。

易错点 20 三角函数单调性判断错误

【问题】：已知函数 $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ ，求它的单调减区间。

错解： $2k\pi \leq \frac{\pi}{4} - 2x \leq 2k\pi + \pi$

剖析：概念混淆，错因在于把复合函数的单调性与基本函数的单调性概念相混淆。应化成

$y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 求解 **正确答案**： $\left(k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{5\pi}{8}\right) (k \in \mathbb{Z})$

反思：对于函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 来说，当 $\omega > 0$ 时，由于内层函数 $u = \omega x + \varphi$ 是单调递增的，所以函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调性与函数 $y = \sin x$ 的单调性相同，故可完全按照函数 $y = \sin x$ 的单调性来解决；但当 $\omega < 0$ 时，内层函数 $u = \omega x + \varphi$ 是单调递减的，所以函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调性与函数 $y = \sin x$ 的单调性正好相反，就不能按照函数 $y = \sin x$ 的单调性来解决。一般来说，应根据诱导公式将 x 的系数化为正数加以解决，对于带有绝对值的三角函数宜根据图象从直观上加以解决。

易错点 21 图象变换的方向把握不准

【问题】：要得到函数 $y = \sin x$ 的图象，只需将函数 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象（ ）

A 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 B 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 C 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

错解一：C

剖析：知识残缺，未将函数化成同名函数。



错解二：D

剖析：基础不牢，弄错了平移方向。

正确答案：A

反思：图像的平移变换，伸缩变换因先后顺序不同平移的量不同，

$y = \sin x \rightarrow y = \sin(x + \varphi) (w > 0)$ 平移的量为 $|\varphi|$ ，

$y = \sin x \rightarrow y = \sin wx \rightarrow y = \sin(wx + \varphi) (w > 0)$ 平移的量为 $\frac{|\varphi|}{w}$ 。

易错点 22 忽视平面向量基本定理的成立条件

【问题】：下列各组向量中，可以作为基底的是

① $\vec{a} = (0, 0)$, $\vec{b} = (1, -2)$; ② $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (5, 7)$;

③ $\vec{a} = (3, 5)$, $\vec{b} = (6, 10)$; ④ $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (4, -6)$;

错解：选①或③或④

正确答案：②

剖析：概念模糊，根据基底的定义，只有非零且不共线的向量才可以作为平面内的基底。

反思：如果 \vec{a} 、 \vec{b} 是同一平面内的两个不共线向量，那么对该平面内的任一向量 \vec{c} ，有且只有一

对实数 λ_1, λ_2 ，使 $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ 。在平面向量知识体系中，基本定理是基石，共线向量定理是重要工具。考生在学习这部分知识时，务必要注意这两个定理的作用和成立条件。

易错点 23 忽视“向量数量积运算”与“实数运算”区别

【问题】：已知向量 $\vec{a} = (x, x + \frac{2}{3})$ 与 $\vec{b} = (2x, -3)$ 的夹角为钝角，求实数 x 的取值范围为 _____

错解： $-\frac{1}{2} < x < 2$

剖析：概念模糊，错误地认为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为钝角 $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

正确答案： $-\frac{1}{2} < x < 2$ 且 $x \neq 0$

反思： $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为钝角 $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 且 \vec{a} 与 \vec{b} 不共线 $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 + y_1 y_2 < 0 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \end{cases}$

六、不等式

易错点 24 不等式性质应用不当

【问题】：已知 $0 < \alpha < \pi$ ， $-\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$ ，求 $\alpha - \beta$ 的取值范围。

错解： $\because 0 < \alpha < \pi$ ， $-\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore 0 - (-\frac{\pi}{4}) < \alpha - \beta < \pi - \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \alpha - \beta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

剖析：套用错误，不等式具有同向相加性质，但两边不能分别相减。



正确答案： $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$

反思：不等式基本性质是不等式的基础，有些性质是条件不等式，在使用这些性质解题时，务必要检验成立条件，不能想当然套用，忽视了就会出错。

易错点 25 忽视等号同时成立的条件，扩大了范围

【问题】：已知函数 $f(x) = ax^2 + bx$ ，且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$ ，求 $f(-2)$ 的取值范围。

错解：先由 $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$ 求出 a, b 的范围，再用不等式性质求出 $f(-2)$ 的范围为 $[5, 10]$ 。

剖析：知识残缺，多次使用同向相加性质，从而扩大了取值范围。

正确答案：利用待定系数法或线性规划求解， $f(-2)$ 的范围为 $[5, 10]$ 。

反思：在多次运用不等式性质时，其等号成立的条件可能有所不同，造成累积误差，结果使变量范围扩大。为了避免这类错误，必须注意①检查每次使用性质时等号成立的条件是否相同；②尽可能多的使用等式。

易错点 26 去分母时没有判断分母的符号

【问题】：解不等式 $\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} > 0$

错解： $\because \frac{x^2 - x - 6}{x - 1} > 0, \therefore x^2 - x - 6 > 0$ ，解得 $\{x | x < -2, \text{或} x > 3\}$

剖析：基础不实，没有考虑分母 $x - 1$ 的符号，直接去分母，应对 $x - 1$ 进行分类讨论，或用数轴标根法求解。

正确答案： $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$

反思：解分式不等式的依据是分式的基本性质 $a > b, c > 0 \Rightarrow a c > b c$ ； $a > b, c < 0 \Rightarrow a c < b c$ 。解分式不等式基本思想是通过去分母将分式不等式转化为整式不等式，但在去分母之前必须对分母的符号进行判断，必要时要对分母进行讨论。

易错点 27 解含参数不等式时分类讨论不当

【问题】：解关于 x 的不等式 $|2x - 1| \leq a - 2$

错解一：原不等式等价于 $-(a - 2) \leq 2x - 1 \leq a - 2$ ，解得 $-\frac{a}{2} + \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$

剖析：基础不实，直接利用绝对值不等式的解集公式，而忽视对 $a - 2$ 进行分类讨论。

错解二：当 $a - 2 < 0$ 时，原不等式不成立。

当 $a - 2 > 0$ 时，原不等式等价于 $-(a - 2) \leq 2x - 1 \leq a - 2$ ，解得 $-\frac{a}{2} + \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$

剖析：技能不熟，没有对 $a - 2 = 0$ 进行讨论。

正确答案：当 $a - 2 < 0$ 时，不等式解集是 Φ ；当 $a - 2 \geq 0$ 时，不等式解集是

$$\left\{ x \mid \frac{3-a}{2} \leq x \leq \frac{a-1}{2} \right\}$$



反思：含参数不等式的解法是不等式问题的难点。解此类不等式时一定要对字母分类讨论，讨论时要做到不重不漏，分类解决后，要对各个部分的结论按照参数由小到大进行整合。

易错点 28 忽视均值不等式应用条件

【问题】1：若 $x < 0$ ，求函数 $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 的最值。

错解：当 $x = \sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$

剖析：基础不实，基本不等式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 成立条件为 $a > 0, b > 0$ ，本题中 $x < 0$ ，不能直接使用公式。

正确答案：最大值为 $-2\sqrt{2}$ ，无最小值。

【问题】：设 $0 < x < \pi$ ，求函数 $f(x) = \sin x + \frac{4}{\sin x}$ 的最小值。

错解： $f(x) = \sin x + \frac{4}{\sin x} \geq 2\sqrt{\sin x \cdot \frac{4}{\sin x}} = 4$

剖析：知识残缺，因为上述解法取等号条件是 $\sin x = \frac{4}{\sin x}$ ， $\sin x = \pm 2$ ，而这是不可能的。

正确答案：最小值为 5

【问题】3：设 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + b = 1$ ，求函数 $f(x) = \frac{2}{a} + \frac{3}{b}$ 的最小值。

错解： $\because \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = (a+b) \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{6}{ab}} = 4\sqrt{6}$ ， \therefore 函数 $f(x)$ 的最小值为 $4\sqrt{6}$ 。

剖析：技能不熟，上述解法似乎很巧妙，但两次使用均值不等式时取等号的条件不一样，因此取不到 $4\sqrt{6}$ 。

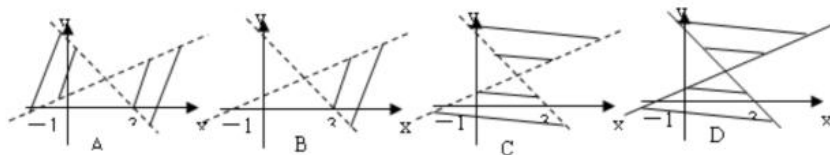
正确答案：最小值为 $5 + 2\sqrt{6}$

反思：均值不等式 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a > 0, b > 0$) 取等号的条件是“一正，二定，三相等”。

在解题过程中，务必要先检验取等号的三个条件是否成立。常规的解法是①如果积或和不是定值，设法构造“定值”；②若是 $a > 0, b > 0$ 不能保证，可构造“正数”或利用导数求解；③若是等号不能成立，可根据“对勾函数”图象，利用单调性求解。

易错点 28 平面区域不明

【问题】： $(x - 2y + 1)(x + y - 3) < 0$ 表示的平面区域是 ()





错解一：选 A 计算错误

错解二：选 B 思维不缜密

错解三：选 D 审题粗心，未注意到不含等号。

正确答案：C

反思：一条直线 $l: Ax + By + C = 0 (A, B \text{不全为零})$ 把平面分成两个半平面，在每个半平面内的点 (x, y) 使 $Ax + By + C$ 值的符号一致。鉴于此，作不等式对应的平面区域方法是画线定界，取点定域，若含等号画实线，否则画虚线。

易错点 29 求目标函数最值时忽视 y 的系数 B 的符号

【问题】 若变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} y \leq 1, \\ x + y \geq 0, \\ x - y - 2 \leq 0, \end{cases}$$
 求目标函数 $z = x - 2y$ 的最大值。

错解：先作可行域，在平移直线 $l: x - 2y = t$ 得最优解 $(-1, 1)$ ，所以 $z_{\max} = -3$

剖析：识记错误，当 y 的系数小于 0 时，使得直线 l 在 y 轴上截距最大的可行解，是目标函数取得最小值的最优解。

正确答案：3

反思：解线性规划问题的基本方法是图解法。当 $B > 0$ 时，动直线 $l: Ax + By = t$ 在 y 轴上的截距

越大，目标函数 $z = Ax + By$ 值越大，截距越小，目标函数值越小；反之，当 $B < 0$ 时，动直线

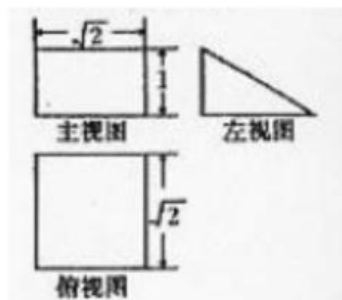
$l: Ax + By = t$ 在 y 轴上截距越大，目标函数 $z = Ax + By$ 值越小，截距越小，目标函数值越大。

其中 y 的系数 B 的符号是解题的关键，也是同学们经常忽略的地方。

七、立体几何

易错点 30 不会将三视图还原为几何体

【问题】 若某空间几何体的三视图如图所示，求该几何体的体积。



错解：如图该几何体是底面为边长 $\sqrt{2}$ 正方形，高为 1

的棱柱， \therefore 该几何体的体积为 $V = (\sqrt{2})^2 \times 1 = 2$

剖析：识图能力欠缺，由三视图还原几何体时出错。

正确答案：V=1

反思：在由三视图还原空间几何体时，要根据三个视图综合考虑，根据三视图的规则，可见轮廓线在三视图中为实线，不可见轮廓线为虚线。在还原几何体形状时，一般是以正视图和俯视图为主，结合侧视图进行综合考虑。

易错点 31 空间点、线、面位置关系不清

【问题】 给定下列四个命题：

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；



- ②若一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；
- ③垂直于同一直线的两条直线相互平行；
- ④若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直。

其中为真命题的是

- A. ①和② B. ②和③ C. ③和④ D. ②和④

错解：A

剖析：①空间想象能力欠缺，不会借助身边的几何体作出判断；

②空间线面关系模糊，定理不熟悉或定理用错。

正确答案：D

反思：空间点、线、面位置关系的组合判断是考查学生对空间点、线、面位置关系判断和性质掌握程度的重要题型。解决这类问题的基本思路有两条：一是逐个寻找反例作出否定的判断，逐个进行逻辑证明作出肯定的判断；二是结合长方体模型或实际空间位置（如教室、课桌、灯管）作出判断，但要注意定理应用准确，考虑问题全面细致。

易错点 32 平行关系定理使用不当

【问题】：正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M, N, Q 分别是棱 D_1C_1 , A_1D_1 , BC 的中点，P 在对角线 BD_1 上，且 $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$ ，给出下列四个命题：(1) $MN \parallel$ 面 APC ；(2) $C_1Q \parallel$ 面 APC ；(3)

A, P, M 三点共线；(4) 面 $MNP \parallel$ 面 APC . 正确序号为 ()

- A、(1)(2) B、(1)(4) C、(2)(3) D、(3)(4)

错解：A、B、D

剖析：空间线面关系模糊，定理不熟悉，未能推出 MN 在平面 APC 内而导致错误。

正确答案：C

反思：证明空间平行关系的基本思想是转化和化归，但要正确应用定理并注意定理的应用条件。如在证明直线 $a \parallel$ 平面 α 时，不能忽略直线 a 在平面 α 外。证明有关线线，线面，面面平行时使用定理应注意找足条件，书写规范，推理严谨。

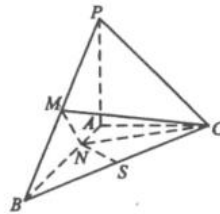
易错点 33 垂直关系定理使用不当

【问题】：已知三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp ABC$, $AB \perp AC$, $PA=AC=\frac{1}{2}AB$, N 为 AB 上一点， $AB=4AN$, M, S 分别为 PB、BC 的中点。

①证明： $CM \perp SN$ ；

②求 SN 与平面 CMN 所成角的大小。

剖析：①在利用线面垂直的判定定理证明两个平面互相垂直时，只证明了该直线垂直于这个平面内的两条直线，没有说明这两条直线是否相交，不符合定理的条件；②在求线面角时，没有说明找角的过程。



反思：证明空间垂直关系的基本思想是转化和化归。如在证明线线垂直时，可先把其中一条直线视为某平面内的直线，然后再利用线面垂直的性质定理和判定定理证明另一条直线垂直于这个平面，进而达到证明线线垂直的目的。

易错点 34 利用空间向量求线面角几种常见错误

【问题】：如图，已知两个正方形 ABCD 和 DCEF 不在同一平面内，M, N 分别为 AB, DF 的

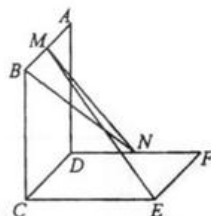


中点 M , 若平面 $ABCD \perp$ 平面 $DCEF$, 求直线 MN 与平面 $DCEF$ 所成角的余弦值。

剖析: 本题在求得平面 $DCEF$ 的一个法向量 $\vec{DA} = (0, 0, 2)$ 及

$$\vec{MN} = (-1, 1, 2) \text{ 后, 可得 } \cos \langle \vec{MN}, \vec{DA} \rangle = \frac{\vec{MN} \cdot \vec{DA}}{\|\vec{MN}\| \|\vec{DA}\|} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

可能出现的错误为: $-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}$



正确答案: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

反思: 若直线与平面所成的角为 θ , 直线的方向向量为 \vec{a} , 平面的法向量为 \vec{n} , 则

$\sin \theta = |\cos \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle|$. 容易出错的是①误以为直线的方向向量与平面的法向量所成角就是线面角;

②误以为直线的方向向量与平面的法向量所成角的余弦就是线面角的正弦, 而忘了加绝对值; ③不清楚线面角的范围。

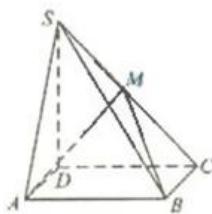
易错点 35 二面角概念模糊

【问题】: 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $SD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = \sqrt{2}$,

$DC = SD = 2$, 点 M 在侧棱 SC 上, $\angle ABM = 60^\circ$.

①证明: M 是侧棱 SC 的中点;

②求二面角 $S-AM-B$ 的余弦值。



剖析: 本题在求得平面 SAM 、 MAB 的法向量 $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, 1)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}, 0, 1)$,

2) 后, 然后计算出 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 接着可能错误地以为二面角 $S-AM-B$ 余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,

其实本题中的二面角是钝角, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 仅为其补角。

正确答案: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

反思: 若两个平面的法向量分别为 \vec{a} , \vec{b} , 若两个平面所成的锐二面角为 θ , 则

$\cos \theta = |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$; 若两个平面所成二面角为钝角, 则 $\cos \theta = -|\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|$ 。总之, 在解

此类题时, 应先求出两个平面的法向量及其夹角, 然后视二面角的大小而定。

利用空间向量证明线面位置关系基本步骤为①建立空间坐标系, 写出相关点的坐标; ②用向量表示相应的直线; ③进行向量运算; ④将运算结果转化为相应的位置关系。解此类问题常见错误有①不会将空间问题转化为向量问题; ②不会建系, 不会用向量表示直线, ③计算错误, ④使



用定理出错，⑤书写不规范。

八、解析几何

易错点 36 倾斜角与斜率关系不明

【问题】：下列命题正确的为_____。

- ①任何一条直线都有倾斜角，都有斜率；②直线的倾斜角越大，它的斜率就越大；
- ③平行于 x 轴的直线，倾斜角为 0° 或 180° ；
- ④平行于 y 轴的直线，斜率不存在，所以倾斜角不存在；

剖析：知识残缺，概念模糊。

正确答案：无选项

反思：倾斜角和斜率分别从不同角度反映了直线的倾斜程度，但二者也有区别，任意一条直线都有倾斜角，但不一定有斜率。解此类题常见错误有①弄错直线倾斜角的范围；②当直线与 x 轴平行或重合时，误认为倾斜角为 0° 或 180° ；③不了解倾斜角与斜率关系。

易错点 37 判断两直线位置关系时忽视斜率不存在

【问题】：已知直线 $l_1: ax+2y+6=0$ 和 $l_2: x+(a-1)y+a^2-1=0$,

- ① 试判断 l_1 与 l_2 是否平行；②当 $l_1 \perp l_2$ 时，求 a 的值。

剖析：本题中的直线为一般式，宜用②中的等价关系求解，如果用①中的等价关系求解，一定要考虑斜率不存在的情况。

正确答案：(1) $a = -1$ (2) $a = \frac{2}{3}$

反思：在解几中，判断平面内两直线的位置关系的方法有两种：

- ① 若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$, 则有

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow k_1 \neq k_2; \quad l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \text{ 且 } b_1 \neq b_2; \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

- ②若直线 $l_1: A_1x+B_1y=C_1$, $l_2: A_2x+B_2y=C_2$, 则有 l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$;

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \\ A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0 \text{ 或 } B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0 \end{cases}; \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

两种方法各有优缺点，方法①简便易行，但仅适用于斜率存在的直线，方法②适用于任意的直线，但运算量较大。考生经常出错的是：用方法①但忽视对斜率的讨论。

易错点 38 平行线间的距离公式使用不当

【问题】：求两条平行线 $l_1: 3x+4y+6=0$ 和 $l_2: 6x+8y-4=0$ 间的距离。

错解： $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 - (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$ 或 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6 - (-4)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 1$

\therefore 直线 l_1 与 l_2 的距离为 2 或 1

剖析：技能不熟，求两条平行线间的距离时，没有把 x 、 y 的系数化成相同。

正确答案： $\frac{8}{5}$

反思：两条平行线之间的距离是指其中一条直线上的任意一点到另一条直线的距离。若直线 $l_1: Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2: Ax+By+C_2=0 (C_1 \neq C_2)$,

则直线 l_1 与 l_2 的距离为 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。常见的错误是



忽视判断两直线中 x 、 y 系数是否相等。

易错点 39 误解“截距”和“距离”的关系

【问题】 若直线 $ax+2y+2=0(a \neq 0)$ 与抛物线 $(y-1)^2=x-1$ 在 x 轴上的截距相等，求 a 的值。

错解：直线 $ax+2y+2=0(a \neq 0)$ 在 x 轴上的截距为 $x=-\frac{2}{a}$ ，抛物线 $(y-1)^2=x-1$ 在 x 轴上的截距为 2， $\therefore \left|-\frac{2}{a}\right|=2$ ，解得 $a=\pm 1$

剖析：概念模糊，错把截距当成距离。

正确答案： $a=-1$

反思：截距是指曲线与坐标轴交点的横（纵）坐标，它是一个实数，可为正数、负数、零，而距离一定是非负数，对此考生应高度重视。

易错点 40 忽视直线点斜式和斜截式方程适用范围

【问题】 求过点 $(2, 1)$ 和 $(a, 2)$ 的直线方程。

错解：先求出斜率 $k=\frac{2-1}{a-2}=\frac{1}{a-2}$ ，故所求直线方程为 $y-1=\frac{1}{a-2}(x-2)$

剖析：知识残缺，未考虑 k 不存在的情况。

正确答案：当 $a=2$ 时，直线方程为 $x=2$ ，当 $a \neq 2$ 时，直线方程为 $y-1=\frac{1}{a-2}(x-2)$

反思：点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 和斜截式 $y=kx+b$ 是两种常见的直线方程形式，应用非常广泛，但它们仅适用于斜率存在的直线。解题时一定要验证斜率 k 是否存在，若情况不明，一定要对斜率 k 分类讨论。

易错点 41 忽视直线截距式方程适用范围

【问题】 直线 l 经过点 $P(2, 3)$ ，且在两坐标轴上的截距相等，求直线 l 方程。

错解：设直线 l 方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a \neq 0)$ ，将点 P 代入得 $a=5$ ， $\therefore l$ 的方程为 $x+y-5=0$

剖析：知识残缺，不了解截距式方程适用范围，漏掉直线过原点的情况。

正确答案： $x+y-5=0$ 或 $3x-2y=0$

反思：直线的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(ab \neq 0)$ ， a 为直线在 x 轴上的截距， b 为直线在 y 轴上的

截距。其适用范围为①不经过原点，②不与坐标轴垂直。

易错点 42 忽视圆的一般式方程成立条件

【问题】 已知圆的方程为 $x^2+y^2+ax+2y+a^2=0$ ，过 $A(1,2)$ 作圆的切线有两条，求 a 的取值范围。

错解： \because 过 $A(1,2)$ 作圆的切线有两条， \therefore 点 A 在圆外， $\therefore a^2+a+9>0$ ， $\therefore a \in R$

剖析：技能不熟，忽视圆的一般式方程的充要条件。

正确答案： $a \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

反思：在关于 x 、 y 的二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 中，当 $D^2+E^2-4F>0$ ，表示一个圆；当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，表示一个点；当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，不表示任何图形。

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 仅仅是曲线为圆的一个必要不充分条件，在判断曲线 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 类型时，判断 D^2+E^2-4F 的符号至关重要，这也是考生易错点之



易错点 43 忽视圆锥曲线定义中的限制条件

【问题】1: 已知定点 $F_1(-3,0), F_2(3,0)$, 在满足下列条件的平面上动点 P 的轨迹中是椭圆的是

A $|PF_1| + |PF_2| = 4$ B $|PF_1| + |PF_2| = 6$ C $|PF_1| + |PF_2| = 10$ D $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 12$

错解: A 或 B

剖析: 概念模糊, 由于 $|F_1F_2|=6$, 所以 A 选项无轨迹, B 选项的轨迹为线段 F_1F_2 。

正确答案: C

【问题】2: 说出方程 $\sqrt{(x-6)^2+y^2} - \sqrt{(x+6)^2+y^2} = 8$ 表示的曲线。

错解: 双曲线

剖析: 知识不全, $\sqrt{(x-6)^2+y^2} - \sqrt{(x+6)^2+y^2} = 8$ 表示动点 $P(x, y)$ 到定点 $F_1(6,0), F_2(-6,0)$ 的距离只差为 8, 且 $|PF_1| > |PF_2|$, \therefore 轨迹为以为焦点 $F_1(6,0), F_2(-6,0)$ 的双曲线的左支。

正确答案: 轨迹为以为焦点 $F_1(6,0), F_2(-6,0)$ 的双曲线的左支

反思: 在椭圆的定义中, 对常数加了一个条件, 即常数大于 $|F_1F_2|$ 。这种规定是为了避免出现两种特殊情况——轨迹为一条线段或无轨迹。在双曲线的定义中, 不仅对常数加了限制条件, 同时要求距离差加了绝对值, 其实如果不加绝对值其轨迹只表示双曲线的一支, 对此考生经常出错。

易错点 57 求椭圆标准方程时忽视“定位”分析

【问题】: 若椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 求 m 的值是。

错解: $a^2=5, b^2=m, \therefore c^2=5-m$, 又 $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\therefore m=3$

剖析: 技能不熟, 没有考虑到焦点在 y 轴上的情形。

正确答案: $m=3$ 或 $m = \frac{25}{3}$

反思: 确定椭圆标准方程包括“定位”与“定量”两个方面, “定位”是指确定椭圆与坐标系的相对位置, 在中心为原点的前提下, 确定焦点在哪个坐标轴上, 以判断方程的形式, 若情况不明, 应对参数进行讨论, “定量”则是指确定 a^2, b^2 的值, 常用待定系数法求解。

易错点 44 利用双曲线定义出错

【问题】: 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$ 上一点 P 到焦点 F_1 的距离为 6, 则 P 到另一焦点 F_2 的距离为

错解: 由双曲线的定义 $||PF_1| - |PF_2|| = 4$, 所以 $|PF_2| = 10$ 或 $|PF_2| = 2$

剖析: 定义模糊, 没有考虑到 P 是在双曲线的哪一支上, P 应在双曲线左支上。

正确答案: 10

反思: 利用双曲线定义要考虑双曲线的两支, 若 P 为双曲线左支上的点, 则 $|PF_1|$ 的最小值为 $c-a$,

若 P 为双曲线右支上的点, 则 $|PF_1|$ 的最小值为 $c+a$ 。

易错点 45 求与抛物线有关的最值问题是忽视定点位置

【问题】: 已知定点 $A(2,5)$, F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, P 为抛物线上动点, 求 $|PA| + |PF|$ 的最小值。

错解: $\because P$ 为抛物线上动点, $\therefore |PF| = P$ 到准线距离, $\therefore |PA| + |PF|$ 的最小值为 $2 + \frac{P}{2} = 3$



剖析：审题出错，误认为点A在抛物线的内部，得到 $|PA|+|PF|$ 的最小值就是A到准线的距离。

实际上点 $A(2,5)$ 在抛物线的外部， $\therefore |PA|+|PF|$ 的最小值为 $|AF|=\sqrt{(2-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$ 。

正确答案： $\sqrt{26}$

反思：求与抛物线有关的最值问题常见题型及方法：

- ① 具备定义背景，可用定义转化为几何问题来处理；
- ② 不具备定义背景，可由条件建立目标函数，然后利用求函数最值的方法来处理。

在这两类题型中，定点的位置尤为重要，处理不当就会出错。

九、概率与统计

易错点 46 互斥事件与对立事件关系模糊

【问题】：某城市有两种报纸甲报与乙报供居民们订阅。记A=“只订甲报”，B=“至少订一种报”，C=“至多订一种报”，D=“不订甲报”，E=“一种报也不订”。判断下列事件是不是互斥事件？如果是互斥事件，再判断是不是对立事件。

- ①A与C；②B与E；③B与D；④B与C；⑤E与C

错解：选①或③或④或⑤

剖析：识记错误，两类事件的概念不清。

正确答案：②是互斥事件，是对立事件

反思：“互斥事件”和“对立事件”都是就两个事件而言的，互斥事件是指事件A与事件B在一次实验中不会同时发生，而对立事件是指事件A与事件B在一次实验中有且只有一个发生，因此，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件。

易错点 47 使用概率加法公式没有注意成立条件

【问题】：投掷一枚均匀的骰子，事件A=“朝上一面的点数为奇数”，B=“朝上一面的点数不超过3”，求 $P(A+B)$ 。

错解： $P(A)=\frac{1}{2}$ ， $P(B)=\frac{1}{2}$ ， $\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

剖析：概念模糊，未验证公式成立条件。

正确答案： $\frac{2}{3}$

反思：概率加法公式是指当事件A、B为互斥事件时，则有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ ，否则只能使用一般的概率加法公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 。解此类题关键是要分清已知事件是由哪些互斥事件组成的，然后代公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 求解，若已知事件不能分解为几个互斥事件的和，则只能代一般的概率加法公式。

易错点 48 运用古典概型概率公式解题时计数出错

【问题】：一个口袋中有大小相同的3个黑球和2个白球，从中不放回地依次摸出2个，求其中含有黑球的概率。

错解：“含有黑球”的对立事件是“全为白球”， $\therefore P(A)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

剖析：计数出错，计算基本事件总数时考虑“顺序”，而求事件A包含的基本事件数个数时没考虑“顺序”。

正确答案： $P(A)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

升学
指南



福建升学指南

ID:fjedu678

反思：运用古典概型的概率公式解题时，需确定全部基本事件的个数，及所求事件 A 包含的基本事件数，然后代公式为 $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(I)} = \frac{m}{n}$ 。为此，计数是解题的关键，求解时①要分清是“分类”还是“分步”，分类时要不重不漏，分步时要注意连续性；②要分清“有序”还是“无序”，有序用排列，无序用组合；③要分清“放回”还是“不放回”。